



**Concours d'accès au Doctorat LMD Informatique 2015 – 2016**

**Exercice 1 :** Soit  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$  un tableau de  $n$  entiers distincts ( $n \geq 2$ ).

a. Quelles sont les conditions pour que  $|t_i - t_j|$  soit maximale? Proposer un algorithme en  $O(n)$  qui retourne  $(t_i, t_j) \in T$  tels que :

$$|t_i - t_j| \geq |u - v| \forall u, v \in T$$

b. Écrire un algorithme en  $O(n * \log n)$  qui retourne  $(t_i, t_j) \in T$  tels que:

$$t_i \neq t_j \text{ et } |t_i - t_j| \leq |u - v|, \forall u, v \in T \text{ et } u \neq v;$$

c. Soit  $m$  un entier donné. Écrire un algorithme en  $O(n * \log n)$  qui retourne  $(t_i, t_j) \in T$  tel que  $t_i + t_j = m$

**Exercice 2 :** (Recherche de la plus grande sous-suite équilibrée).

Soit  $S = (s_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  une suite finie telle que  $s_i$  est soit la lettre **a** soit la lettre **b**.

Une sous-suite équilibrée de  $S$  est une suite de lettres consécutives de  $S$  où **a** et **b** apparaissent exactement le même nombre de fois.

*Exemple :*

Si  $S = \mathbf{aababba}$  alors les suites **ab**, **ba**, **abba**, sont des sous-suites équilibrées de  $S$ , et **aababb** et **ababba** sont les deux sous-suites équilibrées de  $S$  de longueur maximale = 6.

Soit  $T = [0..n-1]$  contenant la suite  $S$  où  $a = -1$  et  $b = 1$ .

1. Ecrire une fonction qui prend deux indices  $i$  et  $j$  de  $T$ ,  $0 \leq i < j < n$ , et retourne 1 si la sous-suite  $(s_k)_{i \leq k \leq j}$  est équilibrée, 0 sinon. Donner sa complexité<sup>1</sup>.
2. Ecrire une fonction qui prend en entrée un indice  $i$ ,  $0 \leq i < n$  de  $T$  et retourne la longueur maximale de la sous-suite équilibrée qui commence à l'indice  $i$ . Donner sa complexité.
3. En déduire une fonction qui retourne la longueur maximale de toutes les sous-suites équilibrées de  $S$ . Donner sa complexité.
4. Ecrire une fonction qui prend en entrée  $T$  et retourne un tableau auxiliaire  $\mathbf{Aux}[0..n-1]$  tel que  $\mathbf{Aux}[k] = \sum_{j=0}^k s_j$ .
5. Que doivent vérifier  $\mathbf{Aux}[i]$  et  $\mathbf{Aux}[j]$  pour que la sous-suite  $(s_k)_{i \leq k \leq j}$  soit équilibrée ?

Supposons que chaque élément  $\mathbf{Aux}[k]$  soit un couple d'entiers (clé, donnée) tel que :  
 $\text{clé} = \sum_{j=0}^k s_j$  et  $\text{donnée} = k$ .

6. Quelle est la valeur maximale (en valeur absolue) d'une clé dans  $\mathbf{Aux}$  ?
7. Est-il possible de trier, en temps linéaire,  $\mathbf{Aux}$  par ordre croissant des clés ?

Si oui, expliquer les étapes de l'algorithme qui exploite ce tri pour la recherche de la plus grande sous-suite équilibrée ; si non, expliquer pourquoi.

<sup>1</sup> Pour toutes les questions on cherche la complexité du cas pire.