



Concours d'accès au Doctorat LMD Informatique 2015 – 2016

Exercice 1 : Soit $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ un tableau de n entiers distincts ($n \geq 2$).

a. Quelles sont les conditions pour que $|t_i - t_j|$ soit maximale? Proposer un algorithme en $O(n)$ qui retourne $(t_i, t_j) \in T$ tels que :

$$|t_i - t_j| \geq |u - v| \forall u, v \in T$$

b. Écrire un algorithme en $O(n * \log n)$ qui retourne $(t_i, t_j) \in T$ tels que:

$$t_i \neq t_j \text{ et } |t_i - t_j| \leq |u - v|, \forall u, v \in T \text{ et } u \neq v;$$

c. Soit m un entier donné. Écrire un algorithme en $O(n * \log n)$ qui retourne $(t_i, t_j) \in T$ tel que $t_i + t_j = m$

Exercice 2 : (Recherche de la plus grande sous-suite équilibrée).

Soit $S = (s_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite finie telle que si est soit la lettre **a** soit la lettre **b**.

Une sous-suite équilibrée de S est une suite de lettres consécutives de S où **a** et **b** apparaissent exactement le même nombre de fois.

Exemple :

Si $S = aababba$ alors les suites **ab**, **ba**, **abba**, sont des sous-suites équilibrées de S , et **aababb** et **ababba** sont les deux sous-suites équilibrées de S de longueur maximale =6.

Soit $T=[0..n-1]$ contenant la suite S où **a=-1** et **b=1**.

1. Ecrire une fonction qui prend deux indices i et j de T , $0 \leq i < j < n$, et retourne 1 si la sous-suite $(s_k)_{i \leq k \leq j}$ est équilibrée, 0 sinon. Donner sa complexité¹.
2. Ecrire une fonction qui prend en entrée un indice i , $0 \leq i < n$ de T et retourne la longueur maximale de la sous-suite équilibrée qui commence à l'indice i . Donner sa complexité.
3. En déduire une fonction qui retourne la longueur maximale de toutes les sous-suites équilibrées de S . Donner sa complexité.
4. Ecrire une fonction qui prend en entrée T et retourne un tableau auxiliaire $\text{Aux}[0..n-1]$ tel que $\text{Aux}[k] = \sum_{j=0}^k s_j$.
5. Que doivent vérifier $\text{Aux}[i]$ et $\text{Aux}[j]$ pour que la sous-suite $(s_k)_{i \leq k \leq j}$ soit équilibrée ?

Supposons que chaque élément $\text{Aux}[k]$ soit un couple d'entiers (clé, donnée) tel que : $\text{clé} = \sum_{j=0}^k s_j$ et $\text{donnée}=k$.

6. Quelle est la valeur maximale (en valeur absolue) d'une clé dans Aux ?
7. Est-il possible de trier, en temps linéaire, Aux par ordre croissant des clés ?

Si oui, expliquer les étapes de l'algorithme qui exploite ce tri pour la recherche de la plus grande sous-suite équilibrée ; si non, expliquer pourquoi.

¹ Pour toutes les questions on cherche la complexité du cas pire.